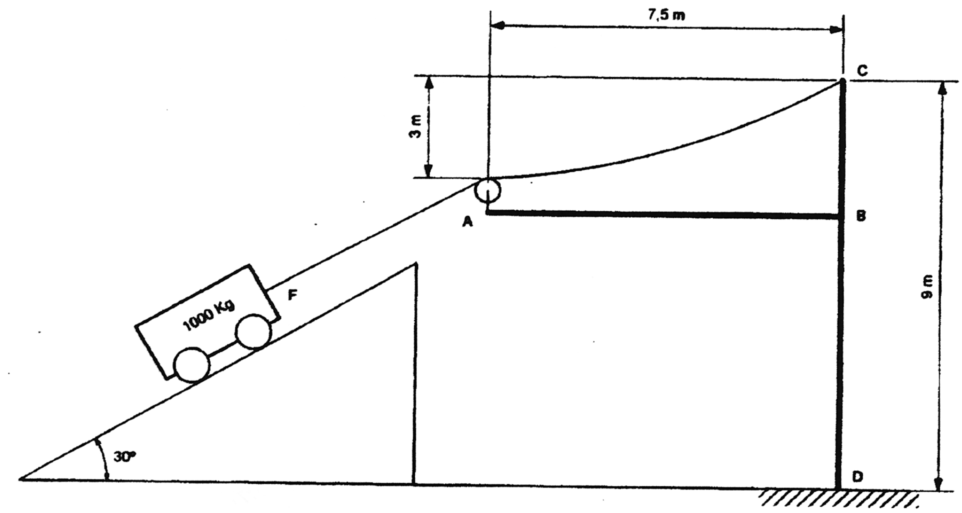
4. Ejercicio 4

En referencia con el ejercicio 1.4 proponer un accionamiento que mitigue los inconvenientes que presenta el de a=cte propuesto allí, a saber:

4.1 Que requiera una potencia máxima menor que los 87415 W del accionamiento con a=cte
4.2 Que tenga un inicio y un final más suaves (progresivos) que los del de a=cte



Calcular la potencia necesaria para elevar el carro desde el reposo hasta 50 km/hr en 10 s. Despreciar el peso del cable FAC.

Figura 4.1

Solución

Para cumplir con los requisitos establecidos se propone un accionamiento tal que:

4.3 Comience con una aceleración menor que la $a = 1{,}3\hat{8}\,\frac{m}{s^2}$ del ejercicio 1.4, sea $a(0) = 0{,}5\,\frac{m}{s^2}$

4.4 Continue con una aceleración $a = 2\,\frac{m}{s^2}$ constante hasta alcanzar una Pmax < 87415 W

4.5 Continue con una aceleración a(t) decreciente de tal manera que Pmax se mantenga constante hasta el final del accionamiento cuando la velocidad sea $V(10) = 13{,}\hat{8}\,\frac{m}{s}$

El cálculo analítico de este accionamiento resulta complicado, por ello se emplea un enfoque numérico basado en la idea central de que si se considera un intervalo de tiempo lo bastante corto, entonces la aceleración puede considerarse como constante durante tal intervalo. Ello simplifica los cálculos que resultan en forma de una tabla. Ver tabla 4.1.

El cálculo de la tabla 4.1 progresa de la manera siguiente:

4.6 Se calcula la tensión T (en el cable) durante el intervalo de tiempo t [tn-1,tn] s = t [0,1] s (cuando $a(tn) = 0{,}5\,\frac{m}{s^2} = CTE$):

$$T(tn) = 1000\ a(tn) + 1000\ 9{,}81\ sen(30º) = 1000\ a(tn) + 4905\ N \qquad (4.1)$$

4.7 Se calcula la velocidad (del carro) al final del intervalo t [0,1] s (cuando V(tn-1) = 0 , tn-1 = 0 y tn = 1 s):

$$V(tn) = V(tn\text{-}1) + a(tn)\,(tn - tn\text{-}1)\ \frac{m}{s} \qquad (4.2)$$

4.8 Se calcula la potencia (instantánea) al final del intervalo t [0,1] s :

$$P(tn) = T(tn)\,V(tn)\ \ W \qquad (4.3)$$

4.9 Se calcula la potencia al comienzo del intervalo t [0,1] s

$$P(tn\text{-}1) = T(tn)\,V(tn\text{-}1)\ W \qquad (4.4)$$

4.10 Se calcula la energía cinética (del carro) al final del intervalo t [0,1] s :

$$Ec(tn) = \frac{1}{2}\,1000\,V(tn)^2\ \ J \qquad (4.5)$$

4.11 Se calcula el espacio (rectilíneo) recorrido por el carro al final del intervalo t [0,1] s (cuando L(tn-1) = L(0) = 0):

$$L(tn) = L(tn\text{-}1) + V(tn\text{-}1)\,(tn - tn\text{-}1) + \frac{1}{2}\,a(tn)\,(tn - tn\text{-}1)^2\ \ m \qquad (4.6)$$

4.12 Se calcula la energía potencial (del carro) al final del intervalo t [0,1] s (estableciendo que Ep(tn-1) = Ep(0) = 0):

$$Ep(tn) = Ep(tn\text{-}1) + 1000\ 9{,}81\ L\ sen(30º) = Ep(tn\text{-}1) + 4905\ L\ \ J \qquad (4.7)$$

4.13 Se calcula la energía mecánica (del carro) al final del intervalo t [0,1] s:

$$E(tn) = Ec(tn) + Ep(tn)\ \ J \qquad (4.8)$$

4.14 Se calcula el trabajo realizado por T al final del intervalo de t [0,1] s integrando gráficamente el area bajo la curva P vs t. Ver figura 4.2. Para ello se calcula el area del trapecio comprendido entre P(tn-1) , P(tn) y el
eje t (cuando tn-1 = 0, P(tn-1) = 0 y E(tn-1) = 0):

$$E(tn) = E(tn\text{-}1) + \frac{P(tn\text{-}1) + P(tn)}{2}\,(tn - tn\text{-}1)\ \ J \qquad (4.9)$$

Los pasos 4.9 a 4.14 no son estrictamente necesarios para calcular las magnitudes t, a y P del accionamiento pero sirven como verificación de la coherencia del cálculo mediante el cumplimiento de la igualdad de los resultados (4.8) = (4.9)

4.15 Se calcula el intervalo de tiempo t (tn-1,tn] s = t (1,tn] s requerido para que con la aceleración máxima
$a(tn) = a_{max} = 2\,\frac{m}{s^2}$ = CTE se alcance la potencia máxima (que permanecerá constante hasta el final) del accionamiento Pmax = CTE. Para ello se resuelve para tn – tn-1 = tn – 1 la ecuación:

$Pmax = T(tn)\ V(tn) = (1000\ a_{max} + 4905)\ V(tn)\ J$ (4.10)

$V(tn) = V(tn\text{-}1) + a(tn)\ (tn - tn\text{-}1)\ \frac{m}{s}$ (4.2)

En (4.10) Pmax tiene que ser tal que $V(10) = 13,\ \hat{8}\ \frac{m}{s}$ al final del cálculo. Como esta Pmax inicialmente se desconoce tiene que ser determinada mediante un tanteo “corto” cuando $V(10) < 13,\ \hat{8}\ \frac{m}{s}$, un tanteo “largo” cuando $V(10) > 13,\ \hat{8}\ \frac{m}{s}$ más una interpolación final.

4.16 Se calcula la potencia al comienzo del intervalo de tiempo t (tn-1,tn] s = t (1,tn] s

$T(tn)\ V(tn\text{-}1) = (1000\ a(tn) + 4905)\ V(tn\text{-}1)\ J$ (4.11)

4.17 Se calcula Ec al final del intervalo de tiempo t (tn-1,tn] s = t (1,tn] s con (4.5)

4.18 Se calcula el espacio recorrido por el carro al final del intervalo t (tn-1,tn] s = t (1,tn] s con (4.6)

4.19 Se calcula la energía potencial al final del intervalo t (tn-1,tn] s = t (1,tn] s con (4.7)

4.20 Se calcula la energía mecánica al final del intervalo t (tn-1,tn] s = t (1,tn] s con (4.8)

4.21 Se calcula el trabajo realizado por T al final del intervalo t (tn-1,tn] s = t (1,tn] s con (4.9) y se comprueba que (4.8) = (4.9)

4.22 Se establecen (en la tabla 4.1) los valores de todas las variables (los mismos calculados desde el paso 4.15 al 4.21) para el tiempo tn = tn-1 + (tn – tn-1) s que corresponde al instante en que termina la aceleración $a_{max} = 2\ \frac{m}{s^2}$ = CTE y que se alcanza la Pmax = CTE del accionamiento. A partir de este momento el accionamiento entra en la fase final en la que V(t) sigue aumentando pero a(t) va disminutendo justo lo necesario para que P = T V = Pmax = CTE

4.23 Se incrementa el tiempo en el paso del cálculo:

$tn = tn\text{-}1 + 0{,}5\ s$ (4.12)

4.24 Se calcula el valor de la aceleración a(t) (supuesta como constante) durante el intervalo de tiempo t (tn-1,tn] s de tal manera que la potencia del accionamiento P = T V = Pmax se mantenga constante. Para ello se resuelve para a(tn) la ecuación:

$T(tn)\ V(tn) = (1000\ a(tn) + 4905)\ (V(tn\text{-}1) + a(tn)\ (tn - tn\text{-}1)) = Pmax = CTE$ (4.13)

4.25 Se calcula la tensión T (en el cable) durante el intervalo de tiempo t (tn-1,tn] s con (4.1)

4.26 Se calcula la velocidad (del carro) al final del intervalo de tiempo t (tn-1,tn] s con (4.2)

4.27 Se repiten (si se desea) los pasos 4.16 hasta el 4.21 para verificar que (4.8) = (4.9)

4.28 Se continúa iterando según los pasos 4.23 hasta 4.27 hasta que se cumpla que

$V(tn) = V(10) = 13,\hat{8}\ \frac{m}{s}$ en este momento el cálculo ha terminado. Normalmente el resultado correcto para V(10) no se podrá alcanzar sino tras dos iteraciones completas de tanteo, una "corta" cuando $V(10) < 13,\hat{8}\ \frac{m}{s}$, una "larga" cuando $V(10) > 13,\hat{8}\ \frac{m}{s}$ más una interpolación final que conducirá al valor correcto de $V(10) = 13,\hat{8}\ \frac{m}{s}$

4.29 Se establece el valor correcto de Pmax = 73368 W < 87415 W del accionamiento con a=cte. Todos estos cálculos aparecen en la tabla 4.1

4.30 Se construye la tabla 4.2 para dibujar la gráfica de la figura 4.2. Para ello se asientan los valores del tiempo t en incrementos de 0,5 s (salvo el último que será lo justo para que el tiempo final sea de 10 s exactos). (El intervalo de tiempo entre 5,5 s y 6,06 s tampoco resulta exactamente de 0,5 s). A continuación se asientan los valores de a(t) (los valores de la 3ª fase cuando P = Pmax = CTE se extraen de la tabla 4.1). Finalmente se asientan los valores de la potencia P(t). Los valores de la 1ª fase durante el intervalo t [0,1] s cuando $a(t) = 0,5\ \frac{m}{s^2}$ = CTE se interpolan linealmente entre P(0) = 0 y P(1) = 2702,5 W

Los valores de la 2ª fase durante el intervalo t (1, 6,06] s cuando $a(t) = 2\ \frac{m}{s^2}$ = CTE se interpolan linealmente entre P(1) = 2702,5 W y P(6,06) = 73368 W. Los valores durante la 3ª fase se extraen de la tabla 4.1

4.31 Se construye la figura 4.2 donde se dibujan las gráficas de a vs t y de P vs t

4.32 En la figura 4.2 se observa como la aceleración tiene que aumentar rápidamente de $a(1) = 0,5\ \frac{m}{s^2}$ hasta $a(1,5) = 2\ \frac{m}{s^2}$. Luego se mantiene constante hasta t = 6,06 s (2ª fase) y luego desciende progresivamente hasta $a(10) = 0,3775\ \frac{m}{s^2}$ (3ª fase)

4.33 En la figura 4.2 se observa como la potencia crece con pequeña pendiente hasta t = 1 s (1ª fase), luego crece con mayor pendiente hasta t = 6,06 s (2ª fase) y finalmente permanece constante hasta el final del accionamiento (3ª fase). El que la gráfica de P vs t sea lineal, durante las fases 1ª y 2ª, no es una consecuencia de las interpolaciones realizadas en punto 4.30 sino de que realmente su dependencia con el tiempo t es lineal ya que según (4.1), (4.2) y (4.3):

$$P(tn) = T(tn)\ V(tn) = (1000\ a(tn) + 4905)\ (V(tn-1) + a(tn)\ (tn - tn-1)) \qquad (4.14)$$

Como durante las fases 1ª y 2ª a(tn) se mantiene constante, (4.14) dice que P(tn) depende linealmente del tiempo tn con una pendiente (constante) igual a (1000 a(tn) + 4905) a(tn)

Tabla 4.1 Resultados completos del cálculo iterativo

a(m/s²)	t(s)	T(N)	V(m/s)	P=TV(W)	TnVn-1(W)	Ec(J)	L(m)	Ep(J)	E=Ec+Ep(J)	E(J)
0.5	1	5405	0.5	2702.5	0	125	0.25	1226.25	1351.25	1351.25
2	5.062672	6905	10.625344	73368	3452.5	56448.967	28.411984	139360.78	195809.75	195809.75
2	6.062672	6905	10.625344	73368	3452.5	56448.967	28.411984	139360.78	195809.75	195809.75
1.5348689	6.562672	6439.8689	11.392778	73368	68425.823	64897.7	33.916514	166360.5	231258.2	231258.2
1.2101053	7.062672	6115.1053	11.997831	73368	69668.039	71973.975	39.764167	195043.24	267017.21	267017.21
0.972034	7.562672	5877.034	12.483848	73368	70511.661	77923.231	45.884586	225063.9	302987.13	302987.13
0.7914599	8.062672	5696.4599	12.879578	73368	71113.74	82941.765	52.225443	256165.8	339107.56	339107.56
0.6510367	8.562672	5556.0367	13.205096	73368	71559.408	87187.285	58.746611	288152.13	375339.41	375339.41
0.5397592	9.062672	5444.7592	13.474976	73368	71898.57	90787.489	65.41663	320868.57	411656.06	411656.06
0.4502826	9.562672	5355.2826	13.700117	73368	72162.305	93846.607	72.210403	354192.03	448038.63	448038.63
0.3775035	10	5282.5035	13.888869	73368	72370.918	96450.342	79.107649	388023.02	484473.36	484473.36

Tabla 4.2 Tabulación de la aceleración y la potencia del accionamiento en función del tiempo

t(s)	a(m/s²)	P=TV(W)
0	0.5	0
0.5	0.5	1352.5
1	0.5	2702.5
1.5	2	9681.5716
2	2	16660.643
2.5	2	23639.715
3	2	30618.786
3.5	2	37597.858
4	2	44576.929
4.5	2	51556.001
5	2	58535.072
5.5	2	65514.144
6.062672	2	73368
6.562672	1.5348689	73368
7.062672	1.2101053	73368
7.562672	0.972034	73368
8.062672	0.7914599	73368
8.562672	0.6510367	73368
9.062672	0.5397592	73368
9.562672	0.4502826	73368
10	0.3775035	73368

Figura 4.2 Gráficas de la aceleración y de la potencia del accionamiento en función del tiempo