

EJERCICIOS DE FENÓMENOS ALEATORIOS Y PROBABILIDAD (CAPÍTULOS 10 Y 11 DEL PROGRAMA)

1º) En un taller hay 3 máquinas; la primera se avería al mes con una probabilidad de 0,04, la segunda con 0,06 y la tercera con 0,1; sus averías son independientes en probabilidad. Se pide: **a)** Probabilidad de que se averíe una sola máquina en el mes; **b)** Probabilidad de que se averíen las tres máquinas en el mes; **c)** Probabilidad de que se averíen la primera y la segunda, pero no la tercera.

Solución: a) $p = 0,176$; b) $p = 0,00024$; c) $p = 0,00216$

2º) Una empresa dispone de tres factorías que producen 1000, 2000 y 4000 productos respectivamente. La proporción de productos que no superan el control de calidad es de 0,01, 0,02 y 0,03, respectivamente. Calcular: **a)** la probabilidad de que un producto de la empresa no supere el control de calidad; **b)** Si se observa un producto y supera el control de calidad ¿cual es la probabilidad de que haya sido fabricado en la tercera factoría?.

Solución: a) $p = 0,02429$; b) $p = 0,5681$

3º) El Sr. Fernández está dudando entre dedicar sus ahorros a un viaje a las Islas Galápagos o invertir en renta variable. Su asesor fiscal le ofrece dos alternativas atrayentes, pero él ante su falta de formación bursátil, confía al azar su decisión. Invertirá en el sector eléctrico si saca una bola roja de una urna que contiene 20 bolas, de las cuales 8 son rojas, 3 verdes y 9 negras. Si la bola no es roja lanzará dos dados y si obtiene una suma de 6 entre ambos invertirá en el sector inmobiliario; en caso contrario se decidirá por las vacaciones en las Galápagos. ¿Cuál es la probabilidad de que finalmente disfrute del viaje?.

Solución: Consideremos los sucesos:

E = "invertir en el sector eléctrico"

I = "invertir en el sector inmobiliario"

G = "viajar a las Galápagos"

Se tiene que $G = \bar{E} \cap \bar{I} \Rightarrow P(G) = P(\bar{E} \cap \bar{I}) = P(\bar{E}) \cdot P(\bar{I} / \bar{E}) = \frac{12}{20} \cdot \frac{31}{36} = \frac{31}{60} = 0,51\bar{6}$

4º) Una población está clasificada en tres grupos, según la edad: el 20% está entre 25 y 35 años, el 65% entre 36 y 50 años y el 15% entre 51 y 65 años. Al investigar los hábitos de dicha población se ha comprobado que toman café por la mañana el 70% del grupo del primer grupo de edades, el 40% del segundo y el 10% del tercero. **a)** Seleccionado aleatoriamente un individuo de la población ¿cuál es la probabilidad de que sea del grupo de 25 a 35 años y tome café? **b)** Si sabemos que un individuo toma café ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al grupo de 51 a 65 años?

Solución: Representemos por A_1 , A_2 y A_3 los sucesos "pertenecer al grupo de edad i ", ($i = 1, 2, 3$), respectivamente y por C, el suceso "tomar café". Se tiene:

a)

$$P(A_1 \cap C) = P(A_1) \cdot P(C/A_1) = 0,2 \cdot 0,7 = 0,14$$

b)

$$P(A_3/C) = \frac{P(A_3) \cdot P(C/A_3)}{P(A_1) \cdot P(C/A_1) + P(A_2) \cdot P(C/A_2) + P(A_3) \cdot P(C/A_3)} = \frac{0,015}{0,415} \cong 0,036$$

5º) El 40 % de los alumnos de la Facultad de Económicas de la UNED proceden de otra Universidad, el 25 % estudia su segunda carrera y el resto cursa estudios superiores por

primera vez. El porcentaje de mujeres en cada uno de estos grupos es de 40, 60 y 55 respectivamente. Para elaborar una encuesta se elige al azar un estudiante y se desea saber:
a) Cual es la probabilidad de que proceda de otra Universidad y sea mujer. **b)** Si se eligió una mujer, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de otra Universidad?

Solución: Sean los sucesos: M = "ser mujer", OU = "proceder de otra universidad" ; SC = "estudiar segunda carrera"; PV = "estudiar por primera vez". Los datos son: P(M/OU) = 0,4; P(M/SC) = 0,6 ; P(M/PV) = 0,55; P(OU) = 0,4; P(SC) = 0,25 y P(PV)= 0,35. Se pide:

a) $P(OU \cap M) = P(OU) \cdot P(M/OU) = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16$

b)
$$P(OU/M) = \frac{P(OU \cap M)}{P(M)} = \frac{P(OU \cap M)}{P(OU)P(M/OU) + P(SC)P(M/SC) + P(PV)P(M/PV)}$$

$$= \frac{0,16}{0,16 + 0,15 + 0,1925} = \frac{0,16}{0,5025} \cong 0,3184$$

6º) Sean 4 urnas con las siguientes composiciones de bolas rojas (R) verdes(V) y negras (N): Urna 1 (1R, 6V,4N); Urna 2 (3R, 2V, 7N); Urna 3 (2R, 3V, 5N); Urna 4 (4R, 8V, 1N Calcule: **a)** Probabilidad de que en una extracción al azar la bola sea negra. **b)** probabilidad de que una bola verde extraída al azar, proceda de la urna 1.

Solución.-

a) $P(N) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{11} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{12} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{10} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{13} = \frac{2615}{6864} \cong 0,381$; **b)** $P(1/V) = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{6}{11}}{\frac{2615}{6864}} = \frac{936}{2615} \cong 0,35793$

7º) Se tienen dos urnas la 1ª contiene 5 bolas rojas y 7 bolas blancas, la 2ª contiene 4 bolas rojas y 3 bolas blancas. Se realiza una extracción de una bola al azar de la primera urna y se devuelve pero por error en lugar de introducirla de nuevo en la 1ª urna se introduce en la 2ª urna; a continuación se extrae también al azar una bola de la 2ª urna. Calcúlese la probabilidad de que esta bola sea roja.

Solución.-

La probabilidad de extraer bola roja de la urna 1 es $P(R1) = \frac{5}{12}$. En ese caso, la probabilidad de sacar bola roja de la segunda urna sería $P(R2/R1) = \frac{5}{8}$.

La probabilidad de extraer bola blanca de la urna 1 es $P(B1) = \frac{7}{12}$. En ese caso, la probabilidad de sacar bola roja de la segunda urna sería $P(R2/B1) = \frac{4}{8}$.

Por el teorema de la probabilidad total: $P(R2) = \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{8} + \frac{7}{12} \cdot \frac{4}{8} = \frac{53}{96} \cong 0,552$

8º) Se sabe que un 7% de las piezas producidas en una factoría son defectuosas. Si en un lote se efectúan 3 extracciones con reemplazamiento (se extrae una pieza que, una vez observada, se devuelve al lote), determinar la probabilidad de que en estas 3 extracciones resulte solamente una pieza defectuosa.

Solución: Consideremos los sucesos $A = \text{“obtener pieza defectuosa”}$ y \bar{A} su suceso contrario. Puesto que la extracción se hace con reemplazamiento, A y \bar{A} son independientes. Por otra parte, la pieza defectuosa puede ser la 1ª, la 2ª o la 3ª. Así pues, el suceso cuya probabilidad se pide puede expresarse así: $S = (A \cap \bar{A} \cap \bar{A}) \cup (\bar{A} \cap A \cap \bar{A}) \cup (\bar{A} \cap \bar{A} \cap A) \Rightarrow P(S) = P(A \cap \bar{A} \cap \bar{A}) + P(\bar{A} \cap A \cap \bar{A}) + P(\bar{A} \cap \bar{A} \cap A) = 3P(A)P(\bar{A})P(\bar{A}) = 3 \cdot 0,07 \cdot (0,93)^2 = 0,181629$

9º) En una capital de provincia con una población superior a 2.500.000 habitantes, se ha realizado una encuesta para determinar el nº de personas que compran prensa diaria local y prensa diaria nacional. Los resultados obtenidos fueron que el 60% de los habitantes compran diarios locales, el 20% compran diarios de tirada nacional y el 0,5% compra ambos diarios. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona residente en esta localidad, elegida al azar y que es lectora asidua de la prensa local, compre también prensa nacional?

Solución.-

Los datos son: $P(L) = 0,6$; $P(N) = 0,2$ y $P(L \cap N) = 0,005$. Se pide $P(N/L) = \frac{P(N \cap L)}{P(L)} = \frac{0,005}{0,6} \cong 0,008$

10º) Según estadísticas de una Empresa de transporte de línea regular, la probabilidad de que uno de sus vehículos tenga un accidente en un día de lluvia es de 0,09 y en un día seco es de 0,005. Sabiendo que en un período de 10 días ha habido 2 lluviosos y 8 secos y que se ha producido un accidente, calcular la probabilidad de que ocurriese en día lluvioso o seco.

Solución.-

Los datos son: $P(A/LL) = 0,09$; $P(A/S) = 0,005$; $P(LL) = \frac{2}{10} = 0,2$; $P(S) = \frac{8}{10} = 0,8$. Por el teorema de la probabilidad total: $P(A) = 0,2 \cdot 0,09 + 0,8 \cdot 0,005 = 0,022$. Y por el teorema de Bayes:

$$P(LL/A) = \frac{0,2 \cdot 0,09}{0,022} = \frac{9}{11} \cong 0,818; \quad P(S/A) = 1 - P(LL/A) \cong 0,182$$

11º) Se dispone de dos urnas, la U1 contiene 4 bolas blancas y 3 bolas rojas, la U2 tiene 6 bolas blancas y 4 rojas. A continuación se realiza el siguiente experimento aleatorio: se tira un dado y si sale un número par se elige una bola de la 1ª urna (U1) y si sale número impar se elige una bola de la 2ª urna (U2). ¿Cuál es la probabilidad de que salga una bola blanca?

Solución.-

Los datos son: $P(P) = \frac{3}{6} = 0,5$; $P(I) = \frac{3}{6} = 0,5$; $P(B/P) = \frac{4}{7}$; $P(B/I) = \frac{6}{10}$; Por el teorema de la probabilidad total: $P(B) = 0,5 \cdot \frac{4}{7} + 0,5 \cdot \frac{6}{10} = \frac{41}{70} \cong 0,586$

12º) Tenemos tres urnas (U1, U2, U3), la U1 contiene 3 bolas rojas y 3 bolas blancas, la U2 contiene 4 bolas blancas y 2 bolas rojas y la U3 contiene 3 bolas blancas. Se elige al azar una de las tres urnas y se saca una bola blanca ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la 1ª urna?

Solución.-

Los datos son: $P(U1) = P(U2) = P(U3) = \frac{1}{3}$; $P(B/U1) = \frac{3}{6}$; $P(B/U2) = \frac{4}{6}$; $P(B/U3) = 1$.

Por el teorema de la probabilidad total: $P(B) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{6} + \frac{4}{6} + 1 \right) = \frac{13}{18}$. Y por el teorema de Bayes:

$$P(U1/B) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6}}{\frac{13}{18}} = \frac{3}{13} \cong 0,23$$

13º) Suponiendo que en Madrid existe un 60% de mujeres y un 40% de hombres, y que un determinado coche están dispuestos a comprarlo un 5% de mujeres y un 2% de hombres, calcular: **a)** La probabilidad de que el cliente fuera mujer y que estuviera dispuesto a comprar el coche; **b)** Idem. hombre. [Febrero 99]

Solución: Consideremos los sucesos $H =$ "ser hombre" ; $M =$ "ser mujer"; $C =$ "estar dispuesto a comprar el coche". Los datos que se tienen son : $P(H) = 0,4$; $P(M) = 0,6$; $P(C/H) = 0,02$; $P(C/M) = 0,05$. Se pide:

1º) $P(C \cap M) = P(M) \cdot P(C/M) = 0,6 \cdot 0,05 = 0,03$

2º) $P(C \cap H) = P(H) \cdot P(C/H) = 0,4 \cdot 0,02 = 0,008$

14º) La probabilidad de la unión de dos sucesos cualesquiera, $P(A \cup B)$, es igual a : a) $P(A) + P(B)$; b) $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; c) $P(A \cup B) - P(A) - P(B)$; d) Ninguna de las anteriores [Febrero 2000]

Solución $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

15º) En la librería de la UNED tienen preparadas tres cajas para enviar a un centro asociado. Cada caja contiene dos libros. En una de ellas los libros son de economía, en otra son de derecho y en la otra un libro es de derecho y el otro de economía. Exteriormente las cajas no presentan ninguna identificación sobre la clase de libros que contienen. Un día determinado, una persona abrió una caja y sacó un libro que resultó ser de derecho. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro libro de la caja fuese de economía?. [Febrero 2000]

Solución: Los sucesos I, II y III son respectivamente, "elegir la caja 1", "elegir la caja 2" y "elegir la caja 3"; además D y E son los sucesos "elegir libro de derecho" y "elegir libro de economía" respectivamente. Se pide $P(III/D)$ y, aplicando la fórmula de Bayes, tenemos:

$$P(III/D) = \frac{P(D/III) \cdot P(III)}{P(D/I) \cdot P(I) + P(D/II) \cdot P(II) + P(D/III) \cdot P(III)} = \frac{0,5 \cdot \frac{1}{3}}{0 + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0,5 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

16º) Por un estudio encargado por el partido "Seguro Que Ganamos" (SQG) se obtiene la siguiente información: el 17% de la población tiene estudios superiores, el 44% estudios medios, el 30% estudios primarios y el 9% no tiene estudios. De entre los de estudios superiores el 25% votan al partido SQG, entre los de estudios medios el 35%, entre los de estudios primarios el 22% y entre los que no tienen estudios votan partido SQG el 18%. Si se extrae un sujeto al azar, obtenga las siguientes probabilidades: **a)** Que sea titulado superior sabiendo que vota al SQG. **b)** Que sea persona sin estudios que vota al SQG; **c)** Que sea una persona con estudios primarios o que no vote al SQG. [Septiembre 2000]

Solución: a) 0,1525; b) 0,0162; c) 0,7873

17º) La suma de las probabilidades de cualquier suceso A y de su complementario será igual a: **a)** ϕ ; **b)** $1 - P(A)$; **c)** 1; **d)** Ninguna de las anteriores.

Solución: **c)** 1 [Septiembre 2000. Tipo A]

18º) Si un suceso S_1 está contenido en otro S ($S_1 \subset S$) se verifica que

- a) $P(S_1) = P(S)$
- b) $P(S_1) < P(S)$
- c) Ninguna de las anteriores
- d) $P(S_1) \leq P(S)$

Solución: **d)** $P(S_1) \leq P(S)$ [Septiembre 2000. Reserva]

19º) Sean dos sucesos cualesquiera A y B con $P(B) > 0$ se verifica:

- a) $P(A/B) = P(\bar{A}/B)$; b) $P(A \cap B) = P(A)$; c) $P(A/B) + P(B/A) = 1$; d) $P(A/B) + P(\bar{A}/B) = 1$.

Solución: **d)** $P(A/B) + P(\bar{A}/B) = 1$. [Febrero 2001. Tipo A]

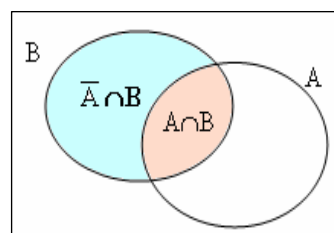
Explicación. Los sucesos $A \cap B$ y $\bar{A} \cap B$ constituyen una partición disjunta de B (ver figura). Luego:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

Así pues, se deduce que:

$$P(A/B) + P(\bar{A}/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$



20º) Se lanza un dado, si sale par se saca una bola de una urna con 3 bolas blancas, 2 rojas y 1 verde, si sale impar se saca una bola de otra urna que tiene 4 bolas blancas 3 rojas y 2 verdes. Obtener la probabilidad de sacar una bola roja.

Solución: Puede hacerse aplicando la fórmula de Laplace: hay 45 casos posibles y 15 favorables, luego la probabilidad pedida es $1/3$. [Febrero 2001. Tipo A]

21º) El conjunto de todos los sucesos posibles de un experimento aleatorio es

- a) Una unión de sucesos; b) Un suceso compuesto; c) El espacio muestral; d) Ninguna de las anteriores

Solución: **c)** El espacio muestral. [Septiembre 2001. Tipo A]

22º) Una urna contiene 4 bolas blancas y 3 rojas. Se efectúan 2 extracciones sucesivas. Obtener la probabilidad de extraer una bola blanca y a continuación una bola roja: **a)** Cuando habiendo extraído la primera bola se devuelve a la urna para realizar la segunda extracción. **b)** Cuando habiendo extraído la primera bola no se devuelve a la urna para realizar la segunda extracción.

Solución:

$$\mathbf{a)} \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{49} = 0,2449; \mathbf{b)} \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7} = 0,2857. \quad [\text{Febrero 2002. Tipo A}]$$

23º) Un experimento aleatorio se caracteriza por

- a) El experimento se puede repetir indefinidamente bajo las mismas condiciones

modelo A, 8 del modelo B, 4 del modelo C y 6 del modelo D. Los resultados obtenidos son: 3 vehículos defectuosos para el modelo A, 2 para el B, 3 en el C y 1 en el D. Calcular la probabilidad de que un coche elegido al azar no sea defectuoso. Suponiendo que un vehículo elegido al azar ha superado las pruebas de calidad, calcule las probabilidades de que sea de tipo A, B, C o D.

Solución.-

Llamemos M al suceso “ser defectuoso” y \bar{M} al suceso contrario. Podemos disponer los datos en la siguiente tabla:

	M	\bar{M}	Total
A	3	4	7
B	2	6	8
C	3	1	4
D	1	5	6
Total	9	16	25

La probabilidad de que un coche elegido al azar no sea defectuoso:

$$P(\bar{M}) = \frac{16}{25}$$

Suponiendo que un vehículo elegido al azar ha superado las pruebas de calidad, las probabilidades de que sea de tipo A, B, C o D se expresarán respectivamente $P(A/\bar{M})$, $P(B/\bar{M})$, $P(C/\bar{M})$ y $P(D/\bar{M})$ y de la tabla se deduce:

$$P(A/\bar{M}) = \frac{4}{16} = 0,25; P(B/\bar{M}) = \frac{6}{16} = 0,375; P(C/\bar{M}) = \frac{1}{16} = 0,0625; P(D/\bar{M}) = \frac{5}{16} =$$

0,3125. [Septiembre 2002. Tipo C].

31- Se tienen tres urnas iguales. Cada urna contiene dos bolas. En una de ellas las dos bolas son rojas, en otra son negras y en la otra una roja y otra negra. Se saca una bola de una urna que resultó ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra bola de la urna fuese de roja? ¿qué aplica para obtener esta probabilidad?

- a) La probabilidad de que la bola sea roja es $\frac{1}{2}$. Aplico Teorema de Bayes
- b) La probabilidad de que la bola sea roja es $\frac{2}{3}$. Aplico Teorema de la probabilidad total.
- c) La probabilidad de que la bola sea roja es $\frac{1}{3}$. Aplico Teorema de la probabilidad total
- d) Ninguna de las respuestas es correcta.

32-En la puerta de una Facultad hay tres fotocopadoras, A, B y C, que fallan, respectivamente, con probabilidades 0'03, 0'05 y 0'04. Un alumno entra en la Facultad y, al estar libres las tres fotocopadoras, elige una al azar. Al llegar a clase observa que la fotocopia es defectuosa. ¿Qué aplicaría para saber cuál es la probabilidad de obtener una fotocopia defectuosa?

- a) Teorema de la probabilidad total
- b) Regla de Laplace
- c) Teorema de Bayes
- d) Ninguna respuesta es correcta

33 - ¿Cuál de las siguientes expresiones es falsa?

- a) $A \cup (A \cap B) = B$.
- b) $A \cup (A \cap B) = A$.
- c) $A \cap A = A$.
- d) Ninguna respuesta es correcta.

34.- Dos sucesos son independientes si:

- a) $P(B) = P(A/B)$
- b) $P(B) \neq P(B/A) ; P(A) \neq P(A/B)$
- c) $P(B) = P(B/A) ; P(A) = P(A/B)$
- d) Ninguna respuesta es correcta..